

УДК 532.546

## О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ МАСКЕТА

*М.М. Алимов*

### Аннотация

Предложена модификация методики С. Ховисона построения точных нестационарных решений задачи Хеле-Шоу в двухфазной идеализированной постановке (задачи Маскета). Эффективность модифицированной методики продемонстрирована путем воспроизведения точного решения Д. Кроуди об эволюции эллиптического пузыря одной вязкой жидкости в окружении другой в безграничном щелевом лотке. При этом вскрыта связь с аналогичной задачей Хеле-Шоу в однофазной постановке. Сравнение решений в двух постановках показало, что учет второй фазы оказывает «слабый» регуляризирующий эффект: в одинаковых условиях решение однофазной задачи имеет конечное, а двухфазной – бесконечное время существования.

**Ключевые слова:** задача Хеле-Шоу в двухфазной нестационарной постановке, задача Маскета, эллиптический пузырь.

### Введение

Идеализированная задача Хеле-Шоу является математической моделью процесса эволюции границы раздела двух вязких жидкостей в щелевом лотке в случае пренебрежимо малых капиллярных сил [1]. Различают две постановки: однофазную, когда давление в одной из фаз можно считать однородным, и двухфазную, когда необходимо учитывать неоднородность давления в обеих фазах. Практически с построением первых точных стационарных решений однофазной задачи Хеле-Шоу было замечено, что любое такое решение легко распространяется на случай двухфазной постановки [1]. В то же время нестационарная задача Хеле-Шоу в двухфазной постановке, называемая также задачей Маскета, существенно сложнее аналогичной задачи в однофазной постановке [2]. Так, из множества известных точных нестационарных и нетривиальных решений однофазной идеализированной задачи Хеле-Шоу [3–5] только решение Сэффмена о пальцеобразовании в щелевом лотке типа канала [6] удалось обобщить на двухфазный случай [7]. Объясняется это уникальной симметрией решения Сэффмена в частном случае, когда относительная ширина пальца равна половине ширины канала [8]. В этой же работе была предложена новая методика построения точных решений задачи Хеле-Шоу в двухфазной постановке, не требующая такого рода симметрии, но сводящаяся к некорректной задаче. Эффективно применить свою методику автору [8] удалось только в одном случае – для двухфазного течения вокруг точки стагнации, когда эволюционирующая межфазная граница все время остается прямой линией, а упомянутая некорректная задача допускает тривиальное решение. Автор [9] с использованием методики [8] показал, что для течения, определяемого квадруполем на бесконечности, удастся построить точное решение, когда эллиптический пузырь одной жидкости в окружении другой эволюционирует, оставаясь эллипсом.

Ниже предлагается существенная модификация методики [8], которая исключает некорректную задачу. Эффективность модифицированной методики продемонстрирована путем воспроизведения решения [9].

### 1. Особенности двухфазной постановки задачи Хеле-Шоу

Течение двух несмешивающихся вязких жидкостей в горизонтальном лотке Хеле-Шоу характеризуется законом Дарси для каждой фазы [1]

$$\mathbf{v}^{\pm} = -\frac{h^2}{12\mu^{\pm}}\nabla p^{\pm},$$

который связывает скорость жидкости  $\mathbf{v}^{\pm}(x, y, t)$  и распределение давления  $p^{\pm}(x, y, t)$  в соответствующей области  $\Omega^{\pm}(t)$  физической плоскости, занимаемой жидкостью вязкости  $\mu^{\pm}$ ;  $h$  – величина зазора лотка. Условие несжимаемости жидкостей приводит к уравнениям

$$\Omega^{\pm}(t): \quad \Delta p^{\pm} = 0.$$

На межфазной границе  $\Gamma(t)$  выполняются условия сопряжения: непрерывности давлений и нормальных составляющих скорости жидкости

$$\Gamma(t): \quad p^{+} = p^{-}; \quad -\left(\frac{h^2}{12\mu^{+}}\right)\frac{\partial p^{+}}{\partial n} = -\left(\frac{h^2}{12\mu^{-}}\right)\frac{\partial p^{-}}{\partial n} = u_n.$$

Первое условие носит динамический характер, а второе – кинематический. В частности, второе условие подчеркивает, что межфазная граница материальна и нормальные составляющие скорости частиц жидкости, лежащих на границе, определяют и нормальную скорость продвижения самой границы  $u_n$ .

Поскольку математическая модель процесса включает уравнения Лапласа, целесообразно использовать комплексную физическую плоскость  $z = x + iy$  и комплексные потенциалы течения для каждой жидкости  $W^{\pm}(z, t) = \varphi^{\pm}(x, y, t) + i\psi^{\pm}(x, y, t)$ , где  $\psi^{\pm}(x, y, t)$  – функции тока, гармонически сопряженные с потенциалами  $\varphi^{\pm}(x, y, t)$  [10]. Последние определяются через соответствующие давления

$$\varphi^{\pm}(x, y, t) = -\frac{h^2}{12\mu_*}p^{\pm}(x, y, t),$$

где  $\mu_*$  – некоторая характерная вязкость, которую определим позже.

Вводя относительные подвижности жидкостей  $k^{\pm}$

$$k^{\pm} = \frac{\mu_*}{\mu^{\pm}}, \tag{1}$$

придем к следующим формулам для скоростей течения жидкостей

$$\Omega^{\pm}(t): \quad \mathbf{v}^{\pm}(x, y, t) = k^{\pm}\nabla\varphi^{\pm} \quad \Leftrightarrow \quad V^{\pm}(\bar{z}, t) = k^{\pm}\frac{\partial W^{\pm}}{\partial z}. \tag{2}$$

Здесь  $V^{\pm}(\bar{z}, t)$  – комплекснозначный аналог вектора скорости  $\mathbf{v}^{\pm}(x, y, t)$ .

Условия сопряжения на межфазной границе можно записать в виде

$$\Gamma(t): \quad \varphi^{-} = \varphi^{+}; \quad k^{-}\frac{\partial\varphi^{-}}{\partial n} = k^{+}\frac{\partial\varphi^{+}}{\partial n} = u_n. \tag{3}$$

В терминах комплексных потенциалов они примут вид

$$\Gamma(t): \quad \operatorname{Re} W^{-} = \operatorname{Re} W^{+}; \quad k^{-}\operatorname{Im} W^{-} = k^{+}\operatorname{Im} W^{+},$$

который, однако, не полностью эквивалентен (3), поскольку не содержит информации о скорости  $u_n$ , которая собственно и определяет всю эволюцию.

Если какая-либо из областей  $\Omega^\pm(t)$  неограниченна, например область  $\Omega^-(t)$ , для замыкания задачи к граничным условиям (3) необходимо добавить условие для соответствующего комплексного потенциала течения  $W^-(z, t)$  в бесконечности. В общем случае его можно сформулировать в виде линейной комбинации полиполей и источника [11]

$$z \in \Omega^-(t), \quad |z| \rightarrow \infty: \quad W^-(z, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln z + \sum_{k=1}^K m^{(k)}(t) z^k. \quad (4)$$

Здесь  $Q(t)$  – вещественная функция времени, обозначающая суммарный расход жидкости, отбираемой ( $Q > 0$ ) или нагнетаемой ( $Q < 0$ ) на бесконечности;  $m^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  – комплекснозначные функции времени, обозначающие моменты полиполей на бесконечности.

Обращение в бесконечность скорости течения жидкости  $\overline{\partial W^- / \partial z}$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , очевидно, является следствием идеализации о безграничности лотка. При переходе к реальному лотку конечного размера создать определенное течение Хеле-Шоу с потенциалом, отвечающим поведению (4), можно вполне определенными скоростями отбора или нагнетания жидкости по периферии лотка.

Независимо от выбора характерной вязкости  $\mu_*$  задача Хеле-Шоу в двухфазной постановке (3), (4) будет задачей сопряжения для двух аналитических функций  $W^\pm$  комплексного переменного  $z$ , причем задачей эволюционного типа, поскольку условия сопряжения на свободной границе одновременно определяют ее эволюцию. В качестве  $\mu_*$  выберем величину

$$\mu_* = \frac{(\mu^+)^2 + (\mu^-)^2}{\mu^+ + \mu^-}, \quad (5)$$

которая обладает свойством среднего, то есть если  $\mu^- < \mu^+$ , то  $\mu^- < \mu_* < \mu^+$ . В отличие от арифметического или геометрического среднего, выбор (5) дает то формальное преимущество, что из общей постановки задачи (3), (4) естественным образом вытекают постановки в двух предельных случаях: когда вязкость одной жидкости становится пренебрежимо малой по сравнению с другой и когда вязкости жидкостей становятся равными.

Действительно, в первом случае пусть для определенности  $\mu^+ / \mu^- \rightarrow 0$ . Тогда  $\mu_* \rightarrow \mu^-$ ,  $k^+ \rightarrow \infty$ ,  $k^- \rightarrow 1$ , и давление в области  $\Omega^+(t)$ , которую занимает жидкость пренебрежимо малой вязкости  $\mu^+$ , можно считать практически однородным [1]. Опуская индекс “+” у потенциала, из соотношений (3) непосредственно найдем вид условий на свободной границей  $\Gamma(t)$

$$\Gamma(t): \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_n \quad (6)$$

Совокупность граничных условий (6), к которым при неограниченности области  $\Omega^-(t)$  необходимо добавить условие в бесконечности типа (4), представляет собой однофазную постановку задачи Хеле-Шоу [1]. Отметим, что течение при этом остается двухфазным, однофазность постановки лишь подчеркивает, что нет необходимости решать задачу в области, которую занимает одна из фаз.

Во втором случае имеем:  $\mu_* = \mu^- = \mu^+$ ,  $k^+ = k^- = 1$ . Тогда фазы становятся физически неразличимыми, течение по сути будет однофазным и индексы у потенциалов течения также можно опустить. Контур  $\Gamma(t)$  будет разделять весь лоток на две области  $\Omega^-(t)$  и  $\Omega^+(t)$ , жидкость в которых, скажем, окрашена по-разному. В теории фильтрации такая задача называется задачей вытеснения по схеме разноцветных жидкостей [12].

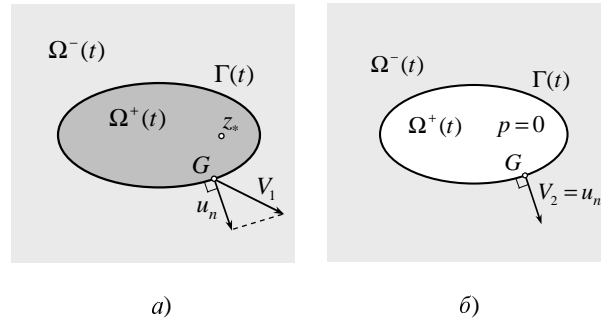


Рис. 1. Вид физической плоскости  $z$  для задачи вытеснения по схеме разноцветных жидкостей (а) и для задачи Хеле-Шоу в однофазной постановке (б)

## 2. Методика построения решений двухфазной задачи Хеле-Шоу

Рассмотрим две вспомогательные задачи. Первая – задача вытеснения в лотке Хеле-Шоу по схеме разноцветных жидкостей (см. рис. 1, а). Вторая – задача Хеле-Шоу в однофазной постановке (см. рис. 1, б).

В первой задаче лоток заполнен одной жидкостью и поле скоростей ее движения  $V_1(\bar{z}, t) = \partial W_1 / \partial \bar{z}$  определяется только системой гидродинамических особенностей [13]. Пусть для определенности это будут источник расхода  $Q(t)$  в точке  $z_*$  и сток того же расхода в бесконечности

$$z \rightarrow z_* : \quad 2\pi(z - z_*) \frac{\partial W_1}{\partial z} \rightarrow Q(t); \quad z \rightarrow \infty : \quad 2\pi z \frac{\partial W_1}{\partial z} \rightarrow Q(t). \quad (7)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  выбран некоторый замкнутый контур  $\Gamma(0)$ . Частицы жидкости, попадающие внутрь контура и образующие область  $\Omega^+(0)$ , помечены более темной краской, в отличие от частиц жидкости, лежащих вне контура и образующих область  $\Omega^-(0)$ . Пусть в результате решения задачи была определена эволюция этого контура, то есть получено семейство контуров  $\Gamma(t)$ , где время  $t \geq 0$  выступает параметром семейства.

Вторая задача описывает вытеснение вязкой жидкости воздухом. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  воздушный пузырь занимает внутренность того же самого замкнутого контура  $\Gamma(0)$ , что и в первой задаче, то есть область  $\Omega^+(0)$ , а жидкость занимает внешность контура, то есть область  $\Omega^-(0)$ , и отбирается на бесконечности с тем же самым расходом  $Q(t)$

$$z \rightarrow \infty : \quad 2\pi z \frac{\partial W_2}{\partial z} \rightarrow Q(t). \quad (8)$$

Сток на бесконечности и условие эквипотенциальности межфазной границы будут определять поле скоростей  $V_2(\bar{z}, t) = \partial W_2 / \partial \bar{z}$  течения жидкости и, соответственно, эволюцию этой границы. Пусть в результате решения задачи эволюция межфазной границы была определена.

Предположим, что найденная эволюция полностью совпадает с эволюцией, найденной при решении первой задачи. Это означает, что для обеих задач будут одинаковы семейство контуров  $\Gamma(t)$ , а также поля  $u_n$  нормальных скоростей продвижения контура  $\Gamma(t)$  в каждый момент времени  $t$ .

Каждый из потенциалов  $\varphi_{1,2}(x, y, t) = \operatorname{Re} W_{1,2}(z, t)$  будет удовлетворять на границе  $\Gamma(t)$  своим условиям. Для потенциала  $\varphi_1(x, y, t)$  это будут, очевидно, условия

аналитического продолжения

$$z \in \Gamma(t) : \quad \varphi_1|_{z+0} = \varphi_1|_{z-0}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{z+0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{z-0} = u_n, \quad (9)$$

где через  $z \pm 0$  обозначено приближение к граничной точке  $z$  со стороны соответствующей области  $\Omega^\pm(t)$ . Граничные условия для потенциала  $\varphi_2(x, y, t)$  можно записать в следующем виде

$$z \in \Gamma(t) : \quad \varphi_2|_{z-0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{z-0} = u_n. \quad (10)$$

Покажем, что простая суперпозиция решений этих двух задач

$$\begin{aligned} z \in \Omega^+(t) : \quad \varphi^+(x, y, t) &= \frac{1}{k^+} \varphi_1(x, y, t), \\ z \in \Omega^-(t) : \quad \varphi^-(x, y, t) &= \frac{1}{k^+} \varphi_1(x, y, t) + \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) \varphi_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (11)$$

дает решение двухфазной задачи Хеле-Шоу вытеснения одной вязкой жидкости другой. Здесь  $k^\pm$  – вычисляемые по формуле (1) подвижности жидкостей вязкости  $\mu^\pm$ , занимающих соответствующие области  $\Omega^\pm(t)$ .

Гармоничность функций  $\varphi^\pm(x, y, t)$  и их непрерывность на межфазной границе при переходе из области  $\Omega^-(t)$  в область  $\Omega^+(t)$  очевидны по построению. Остается только проверить второе граничное условие в (3)

$$\Gamma(t) : \quad k^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = k^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = u_n, \quad (12)$$

где  $u_n$  – именно то поле нормальных скоростей продвижения контура  $\Gamma(t)$ , которое фигурирует в соотношениях (9), (10).

С учетом первой формулы (11) и условия (9) найдем

$$z \in \Gamma(t) : \quad k^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{z+0} = u_n. \quad (13)$$

С учетом второй формулы (11) и условий (9), (10) получим

$$z \in \Gamma(t) : \quad k^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = k^- \left[ \frac{1}{k^+} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{z-0} + \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{z-0} \right] = u_n. \quad (14)$$

Сравнивая соотношения (13), (14) между собой, убедимся в выполнении условия (12). Следовательно, суперпозиция (11) решений  $\varphi_{1,2}(x, y, t)$  двух представленных задач с одинаковой эволюцией межфазной границы  $\Gamma(t)$  дает решение двухфазной задачи Хеле-Шоу вытеснения одной вязкой жидкости другой с той же самой эволюцией межфазной границы  $\Gamma(t)$ .

В терминах комплексных потенциалов решение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} z \in \Omega^+(t) : \quad W^+(z, t) &= \frac{1}{k^+} W_1(z, t), \\ z \in \Omega^-(t) : \quad W^-(z, t) &= \frac{1}{k^+} W_1(z, t) + \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) W_2(z, t). \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с этим система гидродинамических особенностей, инициирующих вытеснение одной вязкой жидкости другой, будет представлять собой суперпозицию особенностей обеих вспомогательных задач. Вычисляя скорости течений

$V^\pm(\bar{z}, t)$  по формуле (2) и учитывая соотношения (7), (8), (15), убедимся, что это будет источник расхода  $Q(t)$  в точке  $z_*$  и сток того же расхода в бесконечности

$$\begin{aligned} z \rightarrow z_* : \quad & 2\pi(z - z_*) \left( k^+ \frac{\partial W^+}{\partial z} \right) \rightarrow Q(t); \\ z \rightarrow \infty : \quad & 2\pi z \left( k^- \frac{\partial W^-}{\partial z} \right) \rightarrow Q(t) \quad k^- \left[ \frac{1}{k^+} + \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) \right] = Q(t). \end{aligned}$$

Если выбрать за начальную конфигурацию контура  $\Gamma(0)$  окружность радиуса  $R > 0$  с центром в точке  $z_*$ , то можно построить решение двухфазной задачи Хеле-Шоу для конкретной схемы течения, представленной на рис. 1. Очевидно, это будет тривиальное решение с радиальной симметрией, которое можно получить и более простым путем. Вместе с тем предложенная методика носит общий характер и применима для любой системы гидродинамических особенностей, а также в случае наличия у лотка непроницаемых границ. Единственным условием эффективности этой методики является одинаковая эволюция межфазной границы  $\Gamma(t)$  для обеих задач.

Отметим, что в части, касающейся первой задачи, предложенная методика совпадает с методикой [8]. Существенное отличие проявляется в части, касающейся второй задачи. Здесь С. Ховисон предлагает решать задачу Хеле-Шоу в однофазной постановке с заданной эволюцией межфазной границы, а именно с эволюцией, найденной в результате решения первой задачи. При этом особенности потенциала течения в области  $\Omega^-(t)$  известны, а особенности в области  $\Omega^+(t)$  должны определяться заданной эволюцией межфазной границы. Однако определение особенностей функции в области по локальному условию на ее границе, очевидно, является некорректной задачей с существенными проблемами даже в вопросах ее разрешимости.

### 3. Течение около точки стагнации

В качестве примера в работе [8] было приведено течение, вызванное квадруполем на бесконечности, также называемое течением около точки стагнации. Его комплексный потенциал  $W_1(z, t)$  имеет вид

$$W_1(z, t) = m_1(t)z^2. \quad (16)$$

Для определенности будем считать момент квадруполь  $m_1(t)$  вещественным. Вычисляя поле скоростей  $V_1(\bar{z}, t) = \overline{\partial W_1 / \partial z}$  течения (16), убедимся, что любая частица жидкости  $G$  с координатами  $(x_0, y_0)$  в момент времени  $t = 0$  передвигается по траекториям (они же – линии тока), которые являются гиперболами (см. рис. 2):

$$x = x_0 e^{M_1(t)}, \quad y = y_0 e^{-M_1(t)}; \quad M_1(t) = 2 \int_0^t m_1(t) dt. \quad (17)$$

Течение (16) обладает тем свойством, что любая прямая линия, составленная из частиц жидкости, остается прямой во все последующие моменты времени [8]. При этом нормальная скорость продвижения такой прямой и угол ее наклона к горизонту, вообще говоря, изменяются, что позволило автору [8] построить решение двухфазной задачи Хеле-Шоу об эволюции прямолинейной межфазной границы в течении, вызванном квадруполем на бесконечности. Покажем, что течение (16) обладает еще одним свойством, которое сформулируем в виде утверждения.

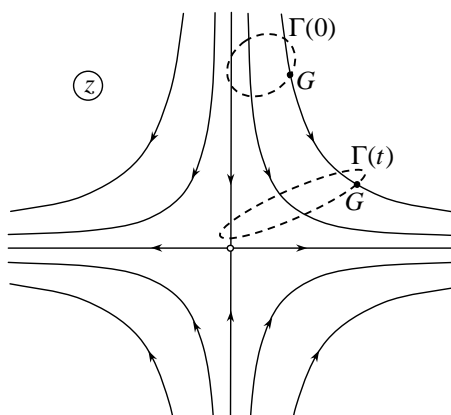


Рис. 2. Линии тока течения возле точки стагнации

**Утверждение.** Если из любых частиц жидкости, двигающейся с потенциалом (16), в момент времени  $t = 0$  составить эллиптический контур  $\Gamma(0)$  ненулевого эксцентриситета, то со временем он будет эволюционировать, оставаясь эллипсом. За конечное время  $t_*$  его эксцентриситет может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда  $M_1(t_*)$  обратится в бесконечность.

Действительно, обозначим через  $G \in \Gamma(0)$  произвольную частицу жидкости, принадлежащую контуру  $\Gamma(0)$ , а через  $(x_0, y_0)$  – ее декартовы координаты. Ввиду эллиптичности контура координаты  $(x_0, y_0)$  частицы  $G \in \Gamma(0)$  удовлетворяют общему уравнению конических сечений [14]

$$a_{11}(0)x_0^2 + 2a_{12}(0)x_0y_0 + a_{22}(0)y_0^2 + 2a_{13}(0)x_0 + 2a_{23}(0)y_0 + a_{33}(0) = 0, \quad (18)$$

где коэффициенты уравнения  $a_{ij}(0)$  должны удовлетворять дополнительным условиям, которые выделяют действительный эллипс из всего множества кривых второго порядка.

Образованный частицами жидкости  $G$  контур  $\Gamma(0)$  за время  $t$  примет в пространстве новую конфигурацию  $\Gamma(t)$ . Декартовы координаты соответствующей частицы  $G \in \Gamma(t)$  обозначим через  $(x, y)$ . Используя уравнения движения (17), выразим в уравнении (18) начальные координаты  $(x_0, y_0)$  частицы через текущие  $(x, y)$ . Получим уравнение контура  $\Gamma(t)$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (19)$$

которое, очевидно, остается уравнением кривой второго порядка. Его коэффициенты  $a_{ij}$  связаны с коэффициентами  $a_{ij}(0)$  линейными соотношениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{11}(0)e^{-2M_1(t)}; & a_{12} &= a_{12}(0); & a_{13} &= a_{13}(0)e^{-M_1(t)}; \\ a_{22} &= a_{22}(0)e^{2M_1(t)}; & a_{23} &= a_{23}(0)e^{M_1(t)}; & a_{33} &= a_{33}(0). \end{aligned}$$

Проанализировав свойства коэффициентов  $a_{ij}$ , можно установить, что контур  $\Gamma(t)$  также будет эллипсом для любого  $t > 0$ . Однако это связано с громоздкими выкладками. Их можно избежать, ограничившись простыми качественными рассуждениями. Потенциальное течение (16) характеризуется несжимаемостью: если контур  $\Gamma(0)$  ограничивал область конечной площади  $S_0$ , то контур  $\Gamma(t)$  должен ограничивать область той же площади  $S_0$ . Из всех конических сечений, отвечающих уравнению (19), только эллипс ограничивает область конечной площади. Следовательно,  $\Gamma(t)$  – эллипс.

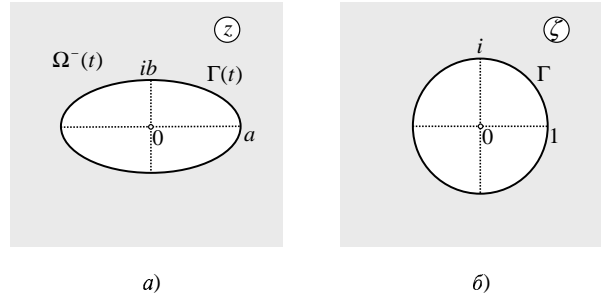


Рис. 3. Вид физической плоскости  $z$  (а) и вспомогательной плоскости  $\zeta$  (б) для задачи Хеле-Шоу об эволюции эллиптического пузыря воздуха

За конечное время  $t_*$  эллипс конечной площади может достичь нулевого эксцентриситета, только если одна из главных полуосей обратится в бесконечность. Для этого по крайней мере одна частица  $(x_0, y_0)$  контура  $\Gamma(0)$  должна уйти на бесконечность. Согласно уравнениям движения (17) это возможно тогда и только тогда, когда  $M_1(t_*)$  обратится в бесконечность. Необходимым условием этого, очевидно, является обращение в бесконечность и самого момента квадруполь  $m_1(t_*)$ .

Более подробно рассмотрим простейший частный случай, когда контур  $\Gamma(0)$  – окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат:

$$\Gamma(0): x_0^2 + y_0^2 = R^2. \quad (20)$$

Соответствующий контур  $\Gamma(t)$  будет, очевидно, эллипсом с центром в начале координат и главными осями, совпадающими с осями координат. Величины его полуосей  $a(t)$ ,  $b(t)$  находятся непосредственно из соотношений (17)

$$\Gamma(t): \frac{x^2}{a^2(t)} + \frac{y^2}{b^2(t)} = 1; \quad a(t) = Re^{M_1(t)}, \quad b(t) = Re^{-M_1(t)}. \quad (21)$$

Поскольку площадь эллипса  $\Gamma(t)$  будет оставаться неизменной и равной  $\pi R^2$ , сам эллипс однозначно определяется заданием отношения полуосей

$$\frac{a(t)}{b(t)} = e^{2M_1(t)}. \quad (22)$$

#### 4. Эволюция эллиптического пузыря одной жидкости в окружении другой в безграничном лотке Хеле-Шоу

В работе [15] было построено точное решение идеализированной задачи Хеле-Шоу в однофазной постановке, согласно которому эллиптический пузырь воздуха в безграничном щелевом лотке, заполненном вязкой жидкостью, эволюционирует, оставаясь эллипсом, если поле течения жидкости определяется только квадруполем на бесконечности (см. рис. 3, а). Показано, что неизменными остаются площадь эллипса и его центр. В результате, выбирая за  $\Gamma(0)$  ту же самую окружность (20) и подбирая определенным образом величину момента квадруполь  $m_2(t)$ , очевидно, можно добиться той же самой эволюции (21) контура  $\Gamma(t)$ .

Согласно [15] решение задачи параметризуется введением вспомогательной плоскости комплексного переменного  $\zeta$ , в которой области течения  $\Omega^-(t)$  отвечает, например, внешность единичного круга (см. рис. 3, б):

$$z(\zeta, t) = A(t)\zeta + \frac{B(t)}{\zeta}, \quad (23)$$



$$W_2(\zeta, t) = m_2(t) A^2(t) \left[ \zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right]. \quad (24)$$

С учетом определенного выбора (20) начальной конфигурации  $\Gamma(0)$  параметры  $A(t)$ ,  $B(t)$  представления (23) удовлетворяют начальным условиям

$$A(0) = R, \quad B(0) = 0 \quad (25)$$

и меняются со временем согласно формулам

$$A(t) = \frac{R}{\sqrt{1 - M_2^2(t)}}, \quad B(t) = A(t) M_2(t); \quad M_2(t) = 4 \int_0^t m_2(t) dt. \quad (26)$$

Само представление (23) подразумевает, что границе  $\Gamma(t)$  области  $\Omega^-(t)$  отвечает эллипс, полуоси которого  $a(t)$ ,  $b(t)$  выражаются через  $A(t)$ ,  $B(t)$

$$a(t) = A(t) + B(t), \quad (t) = A(t) - B(t). \quad (27)$$

Легко убедиться, что площадь эллипса остается неизменной и равной  $\pi R^2$ , и, следовательно, сам эллипс  $\Gamma(t)$  полностью определяется заданием отношения своих полуосей

$$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{1 + M_2(t)}{1 - M_2(t)}. \quad (28)$$

Таким образом, единственным условием совпадения эволюции эллипса (20), (21) и эллипса (23)–(27) является равенство отношения полуосей  $a(t)/b(t)$ , то есть правых частей выражений (22) и (28). После элементарных преобразований это условие приобретает вид

$$M_2(t) = \text{th } M_1(t). \quad (29)$$

В соответствии с разд. 2, если моменты квадруполь  $m_{1,2}(t)$  удовлетворяют условию (29), то решением двухфазной задачи Хеле-Шоу будет течение с комплексным потенциалом, полученным простой суперпозицией (15):

$$\begin{aligned} \Omega^+(t) : W^+(z, t) &= \frac{m_1(t)}{k^+} z^2, \\ \Omega^-(t) : W^-(\zeta, t) &= \frac{m_1(t)}{k^+} \left[ A(t)\zeta + \frac{B(t)}{\zeta} \right]^2 + m_2(t) \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) A^2(t) \left[ \zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

При этом эволюция межфазной границы  $\Gamma(t)$  полностью определяется как соотношениями (20), (21), так и соотношениями (23), (25), (26).

Учитывая представление (23), легко оценить момент квадруполь на бесконечности для результирующего течения (30)

$$m(t) = \frac{m_1(t)}{k^+} + \left( \frac{1}{k^-} - \frac{1}{k^+} \right) m_2(t). \quad (31)$$

В результате построено точное решение об эволюции эллиптического пузыря одной вязкой жидкости в окружении другой в безграничном щелевом лотке, аналогичное решению [9]. В отличие от [9], где был использован достаточно абстрактный аппарат функции Шварца, здесь вся процедура построения решения проведена непосредственно в терминах скоростей и потенциалов течений. Кроме того, естественным образом проявляется связь с аналогичной задачей в однофазной постановке, и, соответственно, появляется возможность сравнить решения задач

в обеих постановках и оценить регуляризирующее влияние учета второй фазы в постановке задачи на эволюцию межфазной границы. Известно, что с переходом от однофазной постановки к двухфазной основное проявление этой некорректности – неустойчивость Сэффмена–Тейлора – сохраняется [1]. Однако такой переход может оказать «слабый» регуляризирующий эффект, когда в одинаковых условиях решение однофазной задачи будет характеризоваться конечным временем существования, а двухфазной – бесконечным.

## 5. Анализ решения

Для фиксированного момента квадруполя  $m_2(t)$  решение (23)–(26) однофазной задачи Хеле–Шоу существует конечное время  $t_*$  [15]. Действительно, без ограничения общности можно положить  $m_2(t) = 1$ . Тогда  $M_2(t) = 4t$  и в момент времени  $t_* = 0.25$  функция  $M_2(t_*)$  достигает 1, величины  $A(t_*)$ ,  $B(t_*)$  обращаются в бесконечность, и, следовательно, решение (23), (24) перестает существовать.

Потребуем выполнения условия (29). В результате найдем вид функции  $M_1(t)$ , а также вид момента квадруполя  $m_1(t)$ , обеспечивающий полное совпадение эволюции межфазной границы  $\Gamma(t)$  в первой и второй задачах:

$$M_1(t) = \operatorname{arth}(4t), \quad m_1(t) = \frac{M_1'(t)}{2} = \frac{2}{1 - 16t^2}. \quad (32)$$

Решение двухфазной задачи Хеле–Шоу (29), (30) по построению будет иметь ту же самую эволюцию межфазной границы  $\Gamma(t)$ , а значит, и то же самое конечное время существования решения  $t_*$ . Однако, в отличие от постоянной величины  $m_2(t)$ , величина  $m(t)$  будет переменной, и в момент времени  $t_*$  она обратится в бесконечность (см. формулы (31), (32)).

Чтобы оценить регуляризирующее влияние перехода от однофазной постановки задачи к двухфазной, необходимо сравнить решения задач в обеих постановках при одинаковой начальной конфигурации  $\Gamma(0)$  и одинаковых гидродинамических особенностях. Первое условие выполнено по построению решения двухфазной задачи. Для выполнения второго условия надо найти такой вид величин  $m_{1,2}(t)$ , которые обеспечивают постоянство момента квадруполя  $m(t)$  двухфазного течения, отвечающего решению (29), (30).

Потребуем постоянства  $m(t)$ . Подставим  $m(t) \equiv m^o$ , где  $m^o$  – константа, в соотношение (31) и проинтегрируем его по времени. После элементарных преобразований и учета определений  $M_{1,2}(t)$  получим соотношение

$$(2k^+ m^o) t = M_1(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{k^+}{k^-} - 1 \right) M_2(t). \quad (33)$$

Без ограничения общности константу  $m^o$  можно выбрать так, чтобы множитель при  $t$  был равен  $\pm 1$ . Множитель при  $M_2(t)$  обозначим через  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu^-}{\mu^+} - 1 \right).$$

Величина  $\alpha$  зависит только от отношения вязкостей: если  $\mu^- > \mu^+$ , то  $\alpha > 0$ ; если  $\mu^- < \mu^+$ , то  $\alpha \in (-0.5, 0)$ . Возможны три предельных случая:  $\mu^+/\mu^- \rightarrow 0$ ,  $\mu^- = \mu^+$ ,  $\mu^-/\mu^+ \rightarrow 0$ , которым соответствуют  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha \rightarrow -0.5$ .

Далее, пользуясь условием (29), выразим величину  $M_2(t)$  через величину  $M_1(t)$ , а последнюю обозначим как новую переменную  $\xi \equiv M_1(t)$ . Тогда соотношение (33) дает уравнение для отыскания зависимости  $\xi$  от  $t$

$$\alpha \operatorname{th} \xi = \pm t - \xi. \quad (34)$$

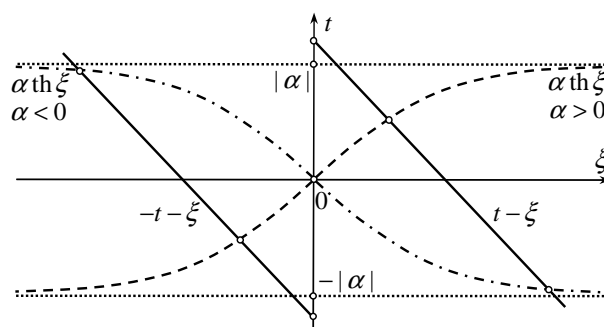


Рис. 4. Вспомогательные графики для решения уравнения (34)

Трансцендентное уравнение (34) может быть разрешено численно, например, методом простых итераций. Вместе с тем для проведения полного качественного анализа достаточно графиков, приведенных на рис. 4. Решение уравнения (34) представляет собой пересечение двух графиков: прямой  $F = \pm t - \xi$  (сплошные линии) и кривой  $F = \alpha \operatorname{th} \xi$  (пунктирная линия для  $\alpha > 0$  и штрих-пунктирная – для  $\alpha < 0$ ).

Если  $m^o$  – положительно (отрицательно), то есть справа в уравнении (34) перед  $t$  нужно брать знак «плюс» («минус»), то вне зависимости от знака  $\alpha$  решение уравнения  $\xi = M_1(t)$  положительно (отрицательно) так же, как и  $\operatorname{th} \xi = M_2(t)$ . Следовательно, знаки моментов квадруполь  $m(t) \equiv m^o$  и  $m_{1,2}(t)$  совпадают, что представляется естественным, но не вполне очевидным, ввиду наличия разности у множителя перед  $m_2(t)$  в формуле (31).

Если  $\alpha$  ограничено, то решение уравнения (34), очевидно, существует и единственно для любого  $t > 0$ . Отсюда следует, что решение двухфазной задачи Хеле-Шоу (29), (30) бесконечно продолжимо по времени. Единственно возможный случай решения с конечным временем существования  $t_*$  – это предельный случай  $\mu^+/\mu^- \rightarrow 0$ , когда  $k^+ \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ , и, следовательно, решение двухфазной задачи (20), (29), (30) вырождается в решение однофазной задачи Хеле-Шоу (23)–(27).

Отметим также еще один предельный случай:  $\mu^-/\mu^+ \rightarrow 0$ , когда  $k^- \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow -0.5$ . В отличие от случая  $\mu^+/\mu^- \rightarrow 0$ , решение двухфазной задачи не вырождается в решение однофазной задачи Хеле-Шоу. Объясняется это тем, что самого по себе условия  $\mu^-/\mu^+ \rightarrow 0$  недостаточно, чтобы поле давления в соответствующей области  $\Omega^-(t)$  стало однородным. Необходимо также, чтобы хотя бы один из факторов, вызывающих течение, то есть какая-либо гидродинамическая особенность или перепад давлений на разных участках границы, действовал бы в области  $\Omega^+(t)$ . Только тогда появляется характерный перепад давления, по сравнению с которым в пределе  $\mu^-/\mu^+ \rightarrow 0$  можно пренебречь перепадами давления в области  $\Omega^-(t)$ . В нашем случае это невозможно, поскольку течение вызывается единственной особенностью – квадруполем, лежащим в замыкании области  $\Omega^-(t)$ . Поэтому постановка задачи в предельном случае  $\mu^-/\mu^+ \rightarrow 0$  остается двухфазной.

### Заключение

Предложена эффективная модификация методики С. Ховисона построения точных решения задачи Маскета, основанная на использовании аппарата полей скорости и потенциалов течений. Эффективность методики продемонстрирована путем воспроизведения точного решения об эволюции эллиптического пузыря одной

вязкой жидкости в окружении другой в безграничном щелевом лотке, построенного в [9] с помощью абстрактного аппарата функций Шварца. Проведен сравнительный анализ решения этой задачи в двух постановках: однофазной и двухфазной (в работе [9] его нет). Показано, что переход от однофазной идеализированной постановки задачи Хеле-Шоу к двухфазной (постановке Маскета) оказывает «слабый» регуляризирующий эффект: для одной и той же начальной конфигурации межфазной границы (окружности), а также одной и той же гидродинамической особенности, определяющей поле течения, (квадруполь на бесконечности с фиксированным моментом) решение однофазной задачи существует конечное время, а решение двухфазной – бесконечное время.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00548, 10-01-00629).

### Summary

*M.M. Alimov. On the Construction of Exact Solutions to the Muskat Problem.*

To construct exact solutions of the unsteady two-phase Hele-Shaw problem (Muskat problem), a new modification of the S. Howison's method has been proposed. The efficiency of this modification has been demonstrated through the reconstruction of the D. Crowdy's explicit solution for nonstationary elliptic bubble of one viscous fluid surrounded by another viscous fluid. This solution has been found to be in direct relation with the explicit solution for similar one-phase Hele-Shaw problem. Comparison of these solutions has shown that there is a weak regularization when we take into account the second phase: the one-phase solution exists for a finite time while the two-phase solution exists for an infinite time under the same initial conditions.

**Key words:** unsteady two-phase Hele-Shaw problem, Muskat problem, elliptic bubble.

### Литература

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
2. *Окендон Дж.Р., Ховисон С.Д., П.Я. Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике* // *Прикл. матем. и мех.* – 2002. – Т. 66, Вып. 3. – С. 515–524.
3. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // *Eur. J. Appl. Math.* – 1992. – V. 3, No 3. – P. 209–224.
4. *Howison S.D.* Fingering in Hele-Shaw cells // *J. Fluid Mech.* – 1986. – V. 167. – P. 439–453.
5. *Алимов М.М.* Общее решение задачи Хеле-Шоу для течений в канале // *Прикл. матем. и мех.* – 2006. – Т. 70, вып. 3. – С. 384–399.
6. *Saffman P.G.* Exact solutions for the growth of fingers from a flat interface between two fluids in a porous medium or Hele-Shaw cell // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1959. – V. 12, Pt. 2. – P. 146–150.
7. *Jacquard P., Seguiet P.* Mouvement de deux fluides en contact dans un milieu poreux // *J. de Mecanique.* – 1962. – Т. 1, F. 4. – P. 367–394.
8. *Howison S.D.* A note on the two-phase Hele-Shaw problem // *J. Fluid Mech.* – 2000. – V. 409. – P. 243–249.

9. *Crowdy D.G.* Exact solutions to the unsteady two-phase Hele-Shaw problem // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2006. – V. 59, No 4. – P. 475–485.
10. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932. = *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
11. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970. = *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.
12. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967 гг.) / Под ред. П.Я. Полубариновой-Кочиной. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
13. *Birkhoff G., Zarantonello E.* Jets, wakes and cavities. – N. Y.: Academ. Press, 1957. = *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964. – 466 с.
14. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – N. Y.: McGraw-Hill Book Comp., 1968. = *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832 с.
15. *Entov V.M., Etingof P.I., Kleinbock D.Ya.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by multipoles // *Eur. J. Appl. Math.* – 1993. – V. 4, No 2. – P. 97–120.

Поступила в редакцию  
23.08.10

---

**Алимов Марс Мясумович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Mars.Alimov@ksu.ru*